

# Algoritmos del muestreo/reconstrucción para realizaciones de procesos Gaussianos con espectros rectangulares

Vladimir Kazakov, Francisco Mendoza Sánchez

Instituto Politécnico Nacional, Depto. Telecomunicaciones,  
Unidad Zacatenco, Ciudad de México, México

vkaz41@hotmail.com, fcm2709@gmail.com

**Resumen.** Con base en la regla de la esperanza matemática condicional se investiga el procedimiento de muestreo-reconstrucción para procesos Gaussianos con un espectro rectangular. Se estudian dos variantes para este tipo de espectro: 1) cuando el espectro está en el origen y 2) al estar desplazado. En ambos casos se reportan los resultados obtenidos tanto en las funciones básicas y en las funciones de error de reconstrucción cuando el intervalo de muestreo y el número de muestras son arbitrarios.

**Palabras clave:** Proceso Gaussiano con espectro rectangular, función básica, error de reconstrucción, número de muestras finitas e intervalos de muestreos arbitrarios.

## Algorithms of the Sample/Reconstruction for Realizations of Gaussian Process with Rectangular Spectrum

**Abstract.** On the basis of the conditional mathematical expectation rule the procedure sampling - reconstruction (PMR) is investigated for the sampling process is Gaussian with a rectangular spectrum: when the spectrum is 1) at origin and 2) displaced; in both cases, they studied the basics functions and functions of reconstruction error, when when the number of samples and interval samples are arbitrary.

**Keywords:** Gaussian process with rectangular spectrum, basic function, function of reconstruction error, number of samples and interval samples are arbitrary.

## 1. Introducción

La descripción del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción (PMR) de las realizaciones en un proceso aleatorio ha sido investigado durante muchos años (ver por ejemplo dos revisiones [1,2]). Según el teorema de Balakrishnan (TB) [3] se puede reconstruir cualquier realización de un proceso aleatorio estacionario con un espectro de potencia restringido a una frecuencia  $\omega_b$  usando la siguiente expresión:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=-N}^N (x(T_i)) \frac{\text{sen} \omega_b(t - iT_b)}{\omega_b(t - iT_b)}, \quad (1)$$

donde  $x(T_i)$  la muestra de una realización en el instante  $T_i$ ;  $\Delta T$  es un intervalo de muestreo *periódico* entre las muestras vecinas:

$$T_b = T_i - T_{i-1} = \frac{\pi}{\omega_b}. \quad (2)$$

Enfatizamos que en TB el error es cero si y solo si el número de las muestras es *infinito*. En [5,6] fue probado que TB es válido solamente para procesos Gaussianos.

El algoritmo (1) se caracteriza por tener un error de reconstrucción igual a cero para todos los procesos independientemente de su función de densidad de probabilidad [4]. Introducimos la función básica  $b_i(t)$ . Como se ve en (1) todas las muestras tienen la misma función básica del tipo  $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ :

$$b_i(t) = \frac{\text{sen} \omega_b(t - iT_b)}{\omega_b(t - iT_b)}. \quad (3)$$

Notamos, que el algoritmo (1) y la función básica (3) ignoran tales características de gran importancia como: la función de densidad de probabilidad (*fdp*), y la función de covarianza del proceso.

El modelo matemático de procesos aleatorios con espectro restringido es citado con mucha frecuencia en la literatura. Pero TB no da ninguna información acerca de la de la influencia para PMR cuando el número  $N$  de muestras son arbitrarias. El artículo presente da la claridad dentro de dichos problemas, porque para cada variante se obtienen dos características más importantes para cada PMR: la función básica y del error de reconstrucción. Estos resultados pueden ser útiles para los investigadores de los sistemas de comunicación con mensajes gaussianos con espectros rectangulares.

La meta del artículo presente es investigar el problema PMR de las realizaciones de procesos Gaussianos con un espectro rectangular, centrado en el origen y al encontrarse desplazado, cuando  $\Delta T$  y  $N$  son arbitrarios. El conocimiento de la forma del espectro nos da la posibilidad de conocer la función de covarianza del proceso dado. Para cumplir este análisis usamos la metodología de la regla de esperanza matemática condicional [7]. La aplicación de dicha regla para la descripción de PMR de realizaciones de procesos aleatorios de varios tipos, fue descrita en algunas publicaciones [5,6], por mencionar algunos. En la investigación de PMR hay dos características principales: 1) la función óptima de reconstrucción; 2) la función mínima del error de la reconstrucción.

## 2. La regla de la esperanza matemática condicional en PMR de realizaciones gaussianas

Cada proceso gaussiano no estacionario esta descrito con tres características principales: la esperanza matemática  $m(t)$ , la varianza  $\sigma^2(t)$  y la función de covarianza  $K(t_1, t_2)$ . Elegimos una realización del proceso y fijamos una multitud de las muestras  $X, T = \{X(T_1), X(T_2), \dots, x(T_N)\}$ . En esta multitud el número de muestras  $N$  y la locación de la muestras  $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  son arbitrarios. Usando  $X, T$  las características a priori  $m(t), \sigma^2(t), K(t_1, t_2)$  se puede obtener las características del proceso condicional  $x(t)|X, T = \tilde{x}(t)$ , es decir, la esperanza matemática condicional  $\langle x(t)|X, T \rangle = \tilde{m}(t)$ , y la varianza condicional  $\langle [\tilde{x}(t) - \tilde{m}(t)]^2 | X, T \rangle = \tilde{\sigma}^2(t)$ . La función  $\tilde{m}(t)$  es la función de reconstrucción de la realización muestreada y la función  $\tilde{\sigma}^2(t)$  es la función de error de reconstrucción. La función  $\tilde{m}(t)$  es la mejor estimación de la realización en el instante de tiempo actual  $t$  y la función  $\tilde{\sigma}^2(t)$  es el error mínimo de reconstrucción de dicha realización en el mismo instante de tiempo  $t$ . Las características principales de PMR son  $\tilde{m}(t)$  y  $\tilde{\sigma}^2(t)$  pueden ser descritas según [8]: Considerando el caso estacionario para  $\tilde{m}(t)$  y  $\tilde{\sigma}^2(t)$ ;  $m(t) = m = 0, \sigma^2(t) = \sigma = 1, K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_2)$ , tienen las formulas siguientes:

$$\tilde{m}(t) = \sum_i = 1^N \left( \sum_j = 1^N (K(t - T_i) a_{ij} x(T_j)) \right), \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_i = 1^N \left( \sum_j = 1^N (K(t - T_i) a_{ij} K(T_j - t)) \right), \quad (5)$$

$$\|K(T_i - T_j)\| = \left\| \begin{matrix} K(T_1 - T_1) \dots K(T_1 - T_N) \\ \dots \end{matrix} \right\|, \quad (6)$$

$$\|a_{ij}\| = \|K(T_i - T_j)\|. \quad (7)$$

La expresión (4) se reescribe en forma simplificada

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N (x(T_j) b_j(t)), \quad (8)$$

aquí es una función básica determinada por la formula

$$b_j(t) = \sum_j = 1^N (k(t - T_i) a_{ij}). \quad (9)$$

Cada muestra tiene su propia función  $b_j(t)$ . En (3) y (9) vemos que generalmente las funciones básicas son diferentes en TB y en el algoritmo fundado en la regla de esperanza matemática condicional. Para comparar correctamente con TB vamos a considerar el caso cuando el intervalo de muestreo es periódico. El proceso investigado es obtenido con un filtro ideal afectado con ruido blanco

gaussiano con densidad espectral  $\frac{N_0}{2}$ . La característica de tal filtro en el dominio de la frecuencia es

$$K(j\omega) = \begin{cases} \text{si } \omega \leq \omega_b & K_0 \\ \text{si } \omega > \omega_b & 0 \end{cases}. \quad (10)$$

Entonces, el espectro de la salida será

$$K(j\omega) = \frac{N_0}{2} |K(j\omega)|^2. \quad (11)$$

Según el teorema Wiener - Khinchin usando (11) tenemos la expresión para la función de covarianza

$$K(\tau) = \sigma^2 \frac{\text{sen}\omega_b\tau}{\omega_b\tau} = \frac{\text{sen}\tau/T_b}{\tau/T_b}, \quad (12)$$

donde

$$\sigma^2 = N_0 K_0^2 \frac{\omega_b}{2\pi}. \quad (13)$$

Considerando un proceso estacionario  $\sigma^2 = 1$ . Es la función  $\text{sen}(x)/x$  la cual tiene sus ceros o puntos de cruce con respecto al eje  $\tau$  ocurren cada  $nT_b$ , donde  $n = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Este proceso tiene una función de covarianza del tipo  $\text{sen}(x)/x$ . Cuando  $\Delta T = T_b$  en estos puntos las muestras son *independientes*. Esta propiedad es muy importante, porque en (1) las muestras localizadas en tales instantes, no tienen conexiones estadísticas entre ellas. Pero la meta del presente artículo es investigar la influencia sobre PMR, cuando el intervalo  $\Delta T \leq T_b$  y cuando el número  $N$  de muestras es arbitrario, y mostrar el efecto que existe sobre PMR al desplazar el espectro. Por ello, es necesario describir PMR de las realizaciones del proceso considerando como principio la regla de esperanza matemática condicional. En este caso primeramente consideremos las funciones básicas. Usando (9), (11) y recordando  $\sigma^2 = 1$ , tenemos

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\text{sen}\omega_b(t - T_i)}{\omega_b(t - T_i)} a_{ij}. \quad (14)$$

Entonces, las características principales (4), (5) de PMR se describen con siguientes formulas:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N \frac{\text{sen}\omega_b(t - T_i)}{\omega_b(t - T_i)} a_{ij}, \quad (15)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \frac{\text{sen}\omega_b(t - T_i)}{\omega_b(t - T_i)} a_{ij} \frac{\omega_b(T_j - t)}{\omega_b(T_j - t)}. \quad (16)$$

Abajo vamos a investigar las funciones básica  $b_j(t)$  en lugar de las funciones de reconstrucción  $\tilde{m}(t)$ , porque las ultimas dependen de muestras concretas  $x(T_i)$ , donde  $i = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

El caso anterior muestra cuando el espectro está en el origen, sin embargo al desplazar el espectro a una frecuencia  $\omega_0$ , esta definida en (17).

$$K(j\omega) = \begin{cases} \text{si } \omega_0 - \omega_b \leq \omega \leq \omega_0 + \omega_b & K_0 \\ \text{si } \omega < \omega_0 - \omega_b \text{ o } \omega > \omega_0 + \omega_b & 0 \end{cases} \quad (17)$$

es la frecuencia central del espectro, mientras  $\omega_b$  es la mitad del ancho de banda del espectro, estos parámetros están definidos en el tiempo, considerando  $\omega_b = \frac{\pi}{T_b}$  y  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . De este modo queda definida la función de covarianza (18) con un espectro desplazado del origen.

$$K(\tau) = \sigma^2 \frac{\text{sen}(\Delta\omega_b\tau/2)}{\Delta\omega_b\tau/2} \cos(\omega_0\tau) = \frac{\pi\tau/T_b}{\pi\tau/T_b} \cos(2\pi\tau/T_0), \quad (18)$$

donde  $\sigma^2 = 1$  en la segunda parte de la ecuación (18), en Fig. 1 se muestra la forma de onda de (18), queda de manifiesto que el comportamiento de la función de covarianza corresponde a las propiedades del  $\cos(x)$ , donde los ceros de la función están determinado por el parámetro  $T_0$ , pero modulada por  $\text{sen}(x)/x$ .

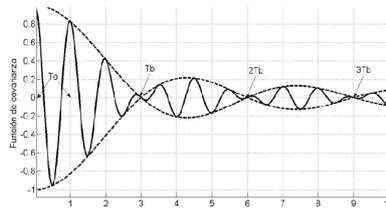


Fig. 1. Función de covarianza con espectro desplazado del origen.

Por tanto, se reescriben las ecuaciones (14)-(16) en términos de la función de covarianza (18). Función básica con espectro rectangular desplazado del origen (19):

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\text{sen}\pi(t - T_i)/T_b}{\pi(t - T_i)/T_b} \cos(2\pi(t - T_i)/T_0) a_{ij} \right). \quad (19)$$

Función de reconstrucción de con espectro desplazado del origen (20):

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N (x(T_j) \frac{\text{sen}\pi(t - T_i)/T_b}{\pi(t - T_i)/T_b} \cos(2\pi(t - T_i)/T_0) a_{ij}) \right). \quad (20)$$

Función de error de reconstrucción para un proceso con espectro rectangular desplazado del origen (21):

$$\tilde{\sigma}(t) = 1 - \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{\text{sen}\pi(t - T_i)/T_b}{\pi(t - T_i)/T_b} \cos(2\pi(t - T_i)/T_0) a_{ij} \frac{\text{sen}\pi(T_j - t)/T_b}{\pi(T_j - t)/T_b} \cos(2\pi(T_j - t)/T_0) \right) \right). \quad (21)$$

### 3. Resultados obtenidos cuando el intervalo dentro de muestras y el número de muestras son arbitrarios

Usando la función de covarianza (12), en la PMR, y para simplificar, elegimos en (2)  $\omega_b = \pi$ , obtenemos  $T_b = 1$ . Obtenemos una variante a la que llamamos *clásica*. Sin embargo esta variante presenta independencia estadística en cada instante de muestreo. En dicho caso, la matriz de covarianza queda de la forma (22):

$$\|K(T_i - T_j)\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Esta matriz demuestra formalmente la independencia de todas las muestras. Dicho efecto influye sobre las ecuaciones (14) - (16).

Considerando (21) las ecuaciones se reducen, por ello la función básica (14) se reduce a (23):

$$b_j(t) = \frac{\text{sen}\omega(t - T_i)}{\omega(t - T_i)}. \quad (23)$$

Vemos que la función básica no depende del número N de muestras participantes en la operación de reconstrucción. De esta manera se reescribe  $\tilde{m}(t)$ , para este tipo de función de covarianza (12), como se muestra en (24):

$$\tilde{m}(t) = \sum_{i=1}^N (x(T_j) \frac{\text{sen}\omega_b(t - T_i)}{\omega_b(t - T_i)}). \quad (24)$$

En (25) se observa que hemos llegado casi al mismo resultado como en TB (1). La diferencia es: en (24) no hay un número infinito de muestras. En (24) se puede sustituir  $N \rightarrow \infty$ :

$$\tilde{m}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (x(T_j) \frac{\text{sen}\omega_b(t - T_i)}{\omega_b(t - T_i)}). \quad (25)$$

Entonces, vamos a tener una coincidencia completa entre TB (1) y el algoritmo (25). Este resultado significa que la función de reconstrucción (1) es un caso

particular del algoritmo general (4), fundado en la regla de la esperanza matemática condicional. Notamos, que la función de reconstrucción óptima guarda su forma cuando el número  $N$  de las muestras es infinito. Y por último  $\tilde{\sigma}^2(t)$  queda definida en (26):

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\text{sen}\omega_b(t - T_i)}{\omega_b(t - T_i)} \frac{\text{sen}\omega_b(T_j - t)}{\omega_b(T_j - t)}. \quad (26)$$

Para ejemplificar, supondremos una  $\Delta T = T_b$ , por tanto obtendremos una matriz identidad (22) para su matriz inversa de covarianza, lo que significa la independencia estadística entre las muestras. Ahora bien para ilustrar PMR utilizando este intervalo se muestra tanto las funciones básicas clásicas del tipo  $\text{sen}(x)/x$  y la función de error de reconstrucción Fig. 2, para ello se realizan la calculaciones correspondientes usando (23) - (25).

Se observa que la forma de onda de las funciones básicas son del tipo  $\text{sen}(x)/x$ , lo que muestra de manera clara la independencia que existe en la muestras a causa que en  $T_b = 1$  hay un cruce en cero de la función de covarianza, y por tanto cada muestra coincide en cero de la función de covarianza.

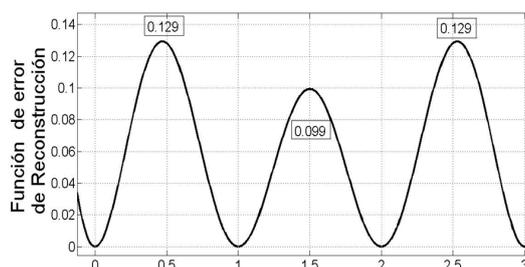


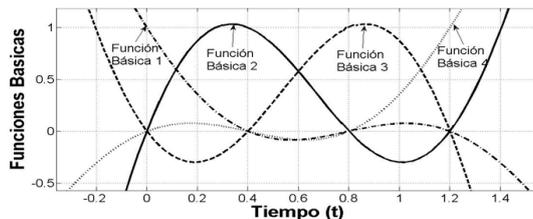
Fig. 2. Función de error de reconstrucción con  $\Delta T = 1, T_b = 1N = 4$ .

Sin embargo, cuando  $\Delta T < T_b$  obtenemos resultados diferentes al caso anterior, pues  $a_{i,j}$  deja de ser una matriz identidad. Esto significa que existe una dependencia estadística durante el proceso de reconstrucción de las muestras no vecinas según (7).

Consideramos el PMR de un proceso con  $N = 4y\Delta T = 0.4$ , de este modo se mantiene la relación  $\Delta T < T_b$ , evitando que una muestra coincida en algún instante con los valores múltiplos de  $T_b$ , con el objetivo de ver la dependencia estadística entre las muestras se presenta en (27) la matriz inversa de covarianza

$$\|a_{ij}\| = \|K(T_i - T_j)\|^{-1} = \begin{pmatrix} 17.73 & -35.36 & 33.38 & -14.23 \\ -35.36 & 76.82 & -75.14 & 33.38 \\ 33.38 & -75.14 & 76.82 & -35.36 \\ -14.23 & 33.38 & -35.36 & 17.73 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

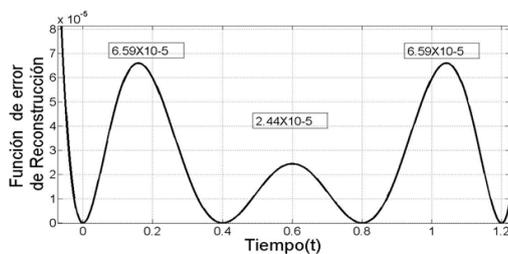
Con el uso de (14) se obtienen las funciones básicas observadas en Fig. 3. En donde se destaca que las formas de onda son diferentes a las formas de onda  $sen(x)/x$ , este efecto es debido a la dependencia estadística existente, es necesario enfatizar que la cuarta muestra presenta un tiempo de covarianza negativo; sin embargo esto es indiferente en la reconstrucción del proceso aleatorio.



**Fig. 3.** Funciones básicas con  $\Delta T = 0.4, T_b = 1N = 4$ .

Utilizando (16) se obtiene la función de error de reconstrucción mostrada en Fig.4. La función de reconstrucción al usar este intervalo presenta menores valores de error que con respecto al caso cuando los instantes de muestreo coinciden con los ceros de la función de covarianza, es decir, cuando  $\Delta T = T_b$ , lo que hace ver la limitación de TB en cuanto a considerar un cifra específica en la reconstrucción en PMR.

El aumento en la función de error es debido a la longitud del intervalo, es decir, a mayor el intervalo mayor el error de reconstrucción.



**Fig. 4.** Función de error de reconstrucción con  $\Delta T = 0.4, T_b = 1N = 4$ .

#### 4. Resultados obtenidos cuando espectro rectangular de un proceso es desplazado del origen

En Fig. 1, se observa el comportamiento de la función de covarianza cuando el espectro es desplazado del origen y centrado en  $\omega_0$  (17), únicamente se reportara

el caso cuando  $T_0 < T_b$ , pues presenta una forma de onda semejante  $\text{sen}(x)/x$ , sin embargo el comportamiento en los ceros de la función la determina la parte del  $\text{cos}(x)$  mediante el parámetro  $T_0$  y la tendencia está controlada por  $\text{sen}(x)/x$ .

Para observar el comportamiento análogo de la función de covarianza (12) y (18), se presenta dos casos: 1) la existente independencia estadística entre las muestras, 2) cuando los instantes de muestreo no coinciden con los ceros de la función de covarianza (18). El primer caso ocurre cuando  $\Delta T = 0.25T_0$ , donde se obtiene una matriz identidad (21) en la matriz inversa de covarianza, por tanto (20) se reescribe en forma de (28):

$$b_j(t) = \frac{\text{sen}\pi(t - T_i)/T_b}{\pi(t - T_i)/T_b} \cos \frac{2\pi(t - T_i)}{T_0}. \quad (28)$$

Al igual, se simplifica la formula (21) en forma de (29):

$$\tilde{\sigma}^2 = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\text{sen}\pi(t - T_i)/T_b}{\pi(t - T_i)/T_b} \cos \frac{2\pi(t - T_i)}{T_0} \frac{\text{sen}\pi(T_j - t)/T_b}{\pi(T_j - t)/T_b} \cos \frac{2\pi(T_j - t)}{T_0}. \quad (29)$$

Para ilustrar los resultados, suponiendo  $\Delta T = 0.25, T_b = 3, N = 4$ , observamos que en Fig. 5 las funciones básicas presentan la forma de onda de la función de covarianza (18) y también que es distinta la forma de onda  $\text{sen}(x)/x$  a pesar, que en ambos casos ponen de manifiesto la independencia estadística entre las muestras.

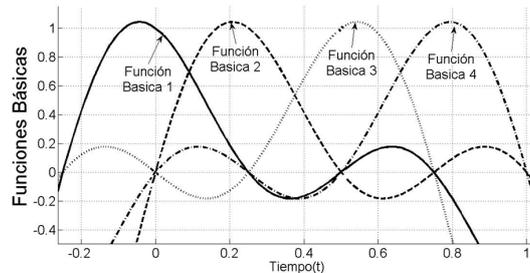
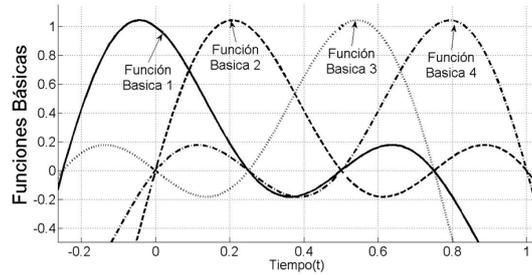


Fig. 5. Funciones básicas con  $\Delta T = 0.25, T_0 = 1, T_b = 3N = 4$ .

La función de error de reconstrucción mostrada en Fig. 5 se observan valores menores en la función de error que en comparación con la Fig. 2. Cuando se consideran intervalos de muestreo, donde se evite que en algún instante del muestreo coincida con los ceros de la función de covarianza, significa la presencia de dependencia estadística entre las muestras, lo que, también, implica que la matriz de covarianza inversa tenga la forma distinta a (21), y dependiendo de

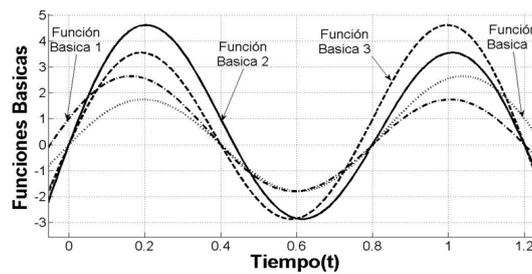


**Fig. 6.** Función de error de reconstrucción con  $\Delta T = 0.25, T_0 = 1, T_b = 3N = 4$ .

número  $N$  de muestras se llegan a tomar valores negativos de la función de covarianza, por todo ello, es necesario considerar que para el cálculo de la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción las ecuaciones (19) - (21) sin modificaciones.

Para ilustrar este hecho supongamos  $\Delta T = 0.4, T_0 = 1, T_b = 3; N = 4$ , de este modo se evita que los instantes de muestreo coincidan con los ceros de la función de covarianza, por tanto las muestras presentan dependencia estadísticas y se usan las ecuaciones (19) - (21). Usando la (24) se obtiene las funciones básicas en Fig.7. Donde se ve claramente que las formas de onda de estas funciones básicas de la Fig. 5 y Fig. 7 son diferentes, debido a que en el primer caso no existe dependencia estadística en comparación con el caso de la Fig. 7.

También se observa como cada función básica contribuye de manera mínima en la reconstrucción del proceso aleatorio de modo diferente en Fig. 5 y Fig. 7.



**Fig. 7.** Funciones Básicas  $\Delta T = 0.4, T_0 = 1, T_b = 3N = 4$ .

Mientras utilizando (26) resultan valores mayores en la función de error de reconstrucción que con respecto a la Fig. 8, debido al aumento del intervalo de muestreo el error es mayor que en comparación con la Fig. 6.

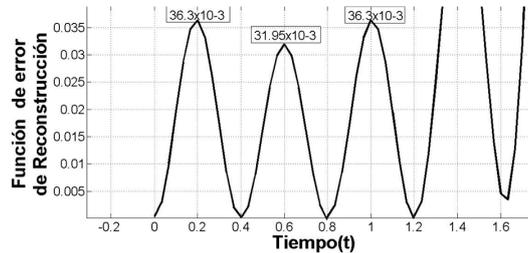


Fig. 8. Función de error de reconstrucción con  $\Delta T = 0.4, T_0 = 1, T_b = 3N = 4$ .

## 5. Conclusiones

Utilizando la regla de la esperanza matemática condicional, como metodología de la investigación, para el cálculo de errores de reconstrucción cuando el número de muestras es limitado y cuando intervalos de muestreo son arbitrarios, en un proceso Gaussiano con espectro rectangular para cuando se encuentra en el origen y al estar desplazado. Se reportan los resultados en PMR al utilizar segmentos con valores negativos de la función de covarianza.

Por último, al evaluar la función de covarianza de un espectro rectangular desplazado del origen, se observó que el valor del error en las gráficas Fig. 8. y Fig. 10 de la función de error de reconstrucción es mayor en relación con los errores reportados al usar la función de covarianza del espectro centrado en el origen, debido a la influencia del aumento del intervalo de muestreo.

## Referencias

1. Jerry, A.: The Shannon sampling theorem: Its various extensions and applications. A tutorial review, Proc. IEEE, vol. 65, pp. 1565–1596 (1977)
2. Jerry, A.: Bibliographic List. In Advanced Topics in Shannon sampling and interpolation theory, Springer, N.Y (1992)
3. Balakrishnan, A.: A Note on the Sampling Principle for Continuous Signals. IRE Trans, On informations theory, Vol. IT-3, pp. 143–146 (1957)
4. Balakrishnan, A.: On the Problem of Time Jitter in Sampling. IRE Trans, On information theory, Vol. IT-3, pp. 226–236 (1962)
5. Kazakov, V.: The sampling-reconstruction procedure with a limited number of samples of stochastic processes and fields on the basis of the conditional mean rule. Electromagnetic waves and electronic system, Vol. 10, Num. 1-2, pp. 98–116 (2005)
6. Kazakov, V.: Sampling-Reconstruction procedures of Gaussian process realizations. Chapter 9 in the book: Probability: interpretation, theory and applications, Nova science publisher inc., USA, NY., pp. 269–297 (2012)
7. Pfeifer, P.E.: Probability for applications. Springer Verlag (1990)
8. Stratonovich, R.: Topics in the theory of Random Noise. Vol I, Gordon and Breach, N.Y., London (1963)